УДК 514.762

ПОВЕРХНОСТИ С ПОСТОЯННЫМИ ЭКВИАФФИННЫМИ ИНВАРИАНТАМИ

Н.М. Онищук

Томский государственный университет
E-mail: Alexxen@yandex.ru

Доказано, что, кроме поверхностей 2-го порядка, существует только 6 поверхностей, все аффинные инварианты которых постоянны. В некоторой неподвижной аффинной системе координат их уравнения имеют вид: 1) $z(x^2+y^2)=1$ – аффинная сфера гиперболического типа, 2) $xyz=1$ – аффинная сфера эллиптического типа, 3) $z=xy-y^3$ – линейчатая несобственная аффинная сфера (поверхность Кэли), 4) $z=xy+\ln y$ – линейчатая несобственная аффинная сфера, 5) $z^2(x^2+y^2)^3=1$ – несобственная аффинная поверхность вращения эллиптического типа.

Полученные результаты являются новыми в аффинной геометрии гладких поверхностей и имеют теоретическое значение. Исследование ведется при помощи метода внешних форм Картана.

Нелинейчатые поверхности гиперболического типа с постоянными инвариантами

В этом разделе используется канонический репер $(M,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ поверхности, построенный в [1]. Точка M – регулярная точка поверхности, вектор $\vec{e}_3$ направлен по аффинной нормали в точке M и нормирован так, что индикатриса аффинных нормалей соответствует поверхности параллелизмом касательных плоскостей. Векторы $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ направлены по касательным к асимптотическим линиям в данной точке. Деривационные формулы такого репера имеют вид

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \omega^1\vec{e}_1+\omega^2\vec{e}_2, \\ d\vec{e}_1 &= (A\omega^1+C\omega^2)\vec{e}_1+J\omega^1\vec{e}_2+\omega^2\vec{e}_3, \\ d\vec{e}_2 &= J\omega^2\vec{e}_1-(A\omega^1+C\omega^2)\vec{e}_2+\omega^1\vec{e}_3, \\ d\vec{e}_3 &= (E\omega^1+F\omega^2)\vec{e}_1+(G\omega^1+E\omega^2)\vec{e}_2, \end{aligned} \tag{1}$$

где $$dJ=(F-3AJ)\omega^1+(G+3CJ)\omega^2. \tag{2}$$

Условия:

$$\begin{aligned} dA\wedge\omega^1+dC\wedge\omega^2 &= (J^2-E-2AC)\omega^1\wedge\omega^2, \\ dE\wedge\omega^1+dF\wedge\omega^2 &= (GJ-2AF)\omega^1\wedge\omega^2, \\ dG\wedge\omega^1+dE\wedge\omega^2 &= -(FG+2CG)\omega^1\wedge\omega^2, \\ dF\wedge\omega^1+dG\wedge\omega^2-3JdA\wedge\omega^1+3JdC\wedge\omega^2 &= \\ =-4(FC+AG)\omega^1\wedge\omega^2 & \end{aligned} \tag{3}$$

обеспечивают полную интегрируемость системы (1,2).

Функции A, C, J, E, F, G составляют полную систему эквиаффинных инвариантов поверхности. Будем считать функции A, C, J, E, F, G постоянными, тогда из (2) и (3) получаем

$$\begin{aligned} &A=-C, G=F=3AJ, \\ &E=J^2+2A^2, A(J-2A)=0. \end{aligned} \tag{4}$$

Из (4) заключаем, что имеются две возможности:

1) $A=C=F=G=0, E=J^2$;
2) $A\neq 0, J=2A, C=-A, G=F=E=6A^2$.

Исследуем каждую из них.

1) Для первого класса $F=G=0$, что характеризует аффинные сферы [1]. Инвариант $E=J^2$, где J – инвариант Пика. Для нелинейчатых поверхностей гиперболического типа инвариант Пика не равен нулю, а потому данная аффинная сфера является собственной аффинной сферой. Найдем уравнение этой аффинной сферы в неподвижной аффинной системе координат.

Система (1) при $A=C=F=G=0$, $E=J^2$, принимает вид

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \omega^1\vec{e}_1+\omega^2\vec{e}_2, \\ d\vec{e}_1 &= J\omega^1\vec{e}_2+\omega^2\vec{e}_3, \\ d\vec{e}_2 &= J\omega^2\vec{e}_1+\omega^1\vec{e}_3, \\ d\vec{e}_3 &= J^2\omega^1\vec{e}_1+J^2\omega^2\vec{e}_2. \end{aligned}$$

Заметим также, что $d\omega^1=0$ и $d\omega^2=0$, следовательно, можно положить

$$\omega^1=\frac{du+dv}{2},\quad \omega^2=\frac{du-dv}{2}.$$

В результате получим вполне интегрируемую систему уравнений:

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \frac{1}{2}(\vec{e}_1+\vec{e}_2)du+\frac{1}{2}(\vec{e}_1-\vec{e}_2)dv, \\ d\vec{e}_1 &= \frac{1}{2}(I\vec{e}_2+\vec{e}_3)du+\frac{1}{2}(I\vec{e}_2-\vec{e}_3)dv, \end{aligned}$$

$$d\vec{e}_2 = \frac{1}{2}(I\vec{e}_1 + \vec{e}_3)du + \frac{1}{2}(-I\vec{e}_1 + \vec{e}_3)dv,$$

$$d\vec{e}_3 = \frac{I^2}{2}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)du + \frac{I^2}{2}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)dv,$$

проинтегрировав которую, получим параметрические уравнения поверхности:

$$x = -\frac{1}{I\sqrt{3}}e^{-\frac{I}{2}u}\sin\frac{I\sqrt{3}}{2}v,$$

$$y = \frac{1}{I\sqrt{3}}e^{-\frac{I}{2}u}\cos\frac{I\sqrt{3}}{2}v,$$

$$z_1 = \frac{1}{2I}e^{Iu}.$$

Отсюда, исключив параметры и сделав следующее преобразование координат:

$$x = x,\ y = y,\ z = 6I^3 z_1,$$

приходим к уравнению

$$z(x^2 + y^2) = 1 \qquad (5)$$

искомой аффинной сферы гиперболического типа. Все аффинные нормали ее проходят через начало координат. Аффинная сфера (5) имеет ряд замечательных свойств. Она является аффинной резной поверхностью, на которой существует сопряженная сеть плоских линий тени, при этом одно семейство является семейством эллипсов [2].

2) Переходим к исследованию класса $I=2A$, $C=-A$, $E=F=G=6A^2$, $A\neq 0$. Система (1) для данного класса поверхностей имеет вид

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \omega^1\vec{e}_1 + \omega^2\vec{e}_2, \\ d\vec{e}_1 &= A(\omega^1 - \omega^2)\vec{e}_1 + 2A\omega^1\vec{e}_2 + \omega^2\vec{e}_3, \\ d\vec{e}_2 &= 2A\omega^2\vec{e}_1 - A(\omega^1 - \omega^2)\vec{e}_2 + \omega^1\vec{e}_3, \\ d\vec{e}_3 &= 6A^2(\omega^1 + \omega^2)(\vec{e}_1 + \vec{e}_2). \end{aligned} \qquad (6)$$

Аффинные линии кривизны определяются уравнением

$$(\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 = 0.$$

Из (6) видим, что вдоль линии кривизны $\omega^1+\omega^2=0$ аффинные нормали параллельны, т.е. описывают цилиндр, вдоль другой – пучок прямых. Конгруэнция аффинных нормалей является цилиндрической, и ее единственная фокальная поверхность выродилась в линию. Линии кривизны $\omega^1=\omega^2$ – плоские линии, лежащие в параллельных плоскостях. Все аффинные нормали параллельны одной плоскости, т.е. данная поверхность представляет собой несобственную аффинную поверхность вращения. Линии $\omega^1=\omega^2$ являются ее меридианами, а также аффинно-геодезическими и линиями тени. Последнее обстоятельство указывает на то, что данная поверхность является также аффинной резной поверхностью. Найдем ее уравнение в неподвижной системе координат. Для этого проинтегрируем систему (6). Имеем

$$d\omega^1 = -A\omega^1 \wedge \omega^2, \quad d\omega^2 = A\omega^1 \wedge \omega^2,$$

$$d(\omega^1 + \omega^2) = 0, \quad d(e^{-Au}(\omega^1 - \omega^2)) = 0.$$

Положим $\omega^1+\omega^2=du$, $e^{Au}(\omega^1-\omega^2)=dv$, тогда $\omega^1=\frac{1}{2}(du+e^{Au}dv)$, $\omega^2=\frac{1}{2}(du-e^{Au}dv)$, и система (6) примет вид

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \frac{1}{2}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)du + \frac{1}{2}e^{Au}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)dv, \\ d\vec{e}_1 &= (A\vec{e}_2 + \frac{1}{2}\vec{e}_3)du + e^{Au}(A\vec{e}_1 + A\vec{e}_2 - \frac{1}{2}\vec{e}_3)dv, \\ d\vec{e}_2 &= (A\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_3)du + e^{Au}(-A\vec{e}_1 - A\vec{e}_2 + \frac{1}{2}\vec{e}_3)dv, \\ d\vec{e}_3 &= 6A^2(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)du. \end{aligned} \qquad (7)$$

Проинтегрировав систему (7) и исключив затем параметры, приходим к уравнению искомой поверхности:

$$z^2(x + y^2)^3 = 1, \quad x > 0. \qquad (8)$$

Изображение поверхности (8) см. в [2, рис. 1]. Все аффинные нормали этой поверхности параллельны плоскости (XOZ). Параллелями данной несобственной аффинной поверхности вращения являются параболы, лежащие в плоскостях z=const, меридианами – кривые, лежащие в плоскостях y=const (заметим, что параллели и меридианы являются аффинными линиями кривизны). Вдоль параллели аффинные нормали параллельны, а вдоль меридиана образуют пучок, центр которого описывает параболу, определяемую в выбранной неподвижной аффинной системе координат уравнением

$$y^2 = -2A^2 x.$$

Эта парабола есть та кривая, в которую, как было отмечено выше, выродилась единственная фокальная поверхность конгруэнции аффинных нормалей.

Линейчатые поверхности с постоянными инвариантами

В этой части работы идет речь о линейчатых поверхностях, не являющихся поверхностями 2-го порядка, а также торсами. Для исследования таких поверхностей воспользуемся каноническим репером, построенным в [3]. Вектор $\vec{e}_3$ по-прежнему направлен по аффинной нормали к поверхности, вектор $\vec{e}_1$ – по прямолинейной образующей, а вектор $\vec{e}_2$ – по касательной к криволинейной асимптотической. Деривационные формулы репера имеют вид

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \omega^1\vec{e}_1 + \omega^2\vec{e}_2, \\ d\vec{e}_1 &= (\frac{F}{3}\omega^1 + 2\omega^2)\vec{e}_1 + \omega^2\vec{e}_3, \\ d\vec{e}_2 &= \omega^2\vec{e}_1 - (\frac{F}{3}\omega^1 + \alpha\omega^2)\vec{e}_2 + \omega^1\vec{e}_3, \\ d\vec{e}_3 &= (E\omega^1 + F\omega^2)\vec{e}_1 + E\omega^2\vec{e}_2. \end{aligned} \qquad (9)$$

Инварианты E, F, α удовлетворяют следующей системе внешних дифференциальных уравнений:

$$dE \wedge \omega^2 = 0,$$

$$dE \wedge \omega^1 + dF \wedge \omega^2 + \frac{2}{3}F^2\omega^1 \wedge \omega^2 = 0,$$

$$dE \wedge \omega^1 + 3d\alpha \wedge \omega^2 + (2\alpha F + 3E)\omega^1 \wedge \omega^2 = 0.$$

Пусть теперь инварианты E, F, α постоянны, тогда F=E=0. Т.к. при этом $d\vec{e}_3$=0, т.е. $\vec{e}_3$ – постоянный вектор, то это означает, что все аффинные нормали параллельны, а поверхность является несобственной аффинной сферой. Т.о., линейчатые поверхности с постоянными инвариантами могут быть только несобственными аффинными сферами. Найдем уравнения таких линейчатых поверхностей.

I. Рассмотрим сначала поверхности, для которых α=F=E=0, тогда $d\omega^1$=0, $d\omega^2$=0, и положим ω^1=du, ω^2=dv. Формулы (9) принимают вид

$$d\vec{r} = \vec{e}_1 du + \vec{e}_2 dv, \quad d\vec{e}_1 = \vec{e}_3 dv, \qquad d\vec{e}_2 = \vec{e}_1 dv + \vec{e}_3 du, \quad d\vec{e}_3 = 0. \tag{10}$$

Интегрируя систему (10) и затем исключая параметры, получаем уравнение

$$z = xy - \frac{1}{3}y^3 \tag{11}$$

линейчатой несобственной аффинной сферы класса α=F=E=0. Ее прямолинейные образующие параллельны одной плоскости (y=0), следовательно, это цилиндроид. Поверхность (11) называется поверхностью Кэли. Одним из замечательных свойств этой поверхности является то, что она несет на себе конгруэнцию парабол с неопределенными фокусами [4]. Прямолинейные образующие поверхности являются диаметрами этих парабол. В выбранной системе координат все аффинные нормали поверхности Кэли параллельны оси OZ.

II. Пусть теперь $\alpha\neq0$ (F=E=0). В этом случае имеем $d\omega^2$=0, $d(e^{\alpha v}\omega^1)$=0 и потому полагаем $e^{\alpha v}\omega^1$=du, ω^2=dv. Тогда формулы (9) принимают вид

$$d\vec{r} = e^{-\alpha u} du \vec{e}_1 + dv \vec{e}_2,$$
$$d\vec{e}_1 = (\alpha\vec{e}_1 + \vec{e}_3)dv,$$
$$d\vec{e}_2 = (\vec{e}_1 - \alpha\vec{e}_2)dv + e^{-\alpha v} du \vec{e}_3,$$
$$d\vec{e}_3 = 0.$$

Проинтегрировав данную систему и исключив затем параметры, получаем в неподвижной аффинной системе координат уравнение

$$z = xy + \ln y, \quad y > 0.$$

Это несобственная линейчатая сфера класса $\alpha\neq0$ (F=E=0).

Итак, имеется только два вида линейчатых поверхностей с постоянными инвариантами:

$$z = xy - \frac{y^3}{3} \quad \text{и} \quad z = xy + \ln y.$$

Поверхности эллиптического типа с постоянными эквиаффинными инвариантами, не являющиеся аффинными сферами

Всякая регулярная поверхность эллиптического типа (кроме аффинной сферы) несет на себе сеть аффинных линий кривизны. Поэтому естественно использование канонического репера, отнесенного к аффинным линиям кривизны, для поверхностей эллиптического типа, не являющихся аффинными сферами. Деривационные формулы такого репера имеют вид:

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \omega^1\vec{e}_1 + \omega^2\vec{e}_2, \\ d\vec{e}_1 &= (\frac{\lambda}{2}\omega^1 - \frac{\rho}{2}\omega^2)\vec{e}_1 + \\ &+ (a\omega^1 - (b+\lambda)\omega^2)\vec{e}_2 + \omega^1\vec{e}_3, \\ d\vec{e}_2 &= (-(a+\rho)\omega^1 + b\omega^2)\vec{e}_1 + \\ &+ (-\frac{\lambda}{2}\omega^1 + \frac{\rho}{2}\omega^2)\vec{e}_2 + \omega^2\vec{e}_3, \\ d\vec{e}_3 &= \delta\omega^1\vec{e}_1 + \chi\omega^2\vec{e}_2, \end{aligned} \tag{12}$$

здесь $\chi\neq\delta$.

При выполнении условий

$$\begin{aligned} & d\lambda\wedge\omega^1 - d\rho\wedge\omega^2 = -3(a\lambda + b\rho + \lambda\rho)\omega^1\wedge\omega^2, \\ & da\wedge\omega^1 - d(b+\lambda)\wedge\omega^2 = \\ & = (-a^2 - b^2 - \frac{3}{2}\lambda^2 + \frac{1}{2}a\rho - \frac{5}{2}b\lambda + \chi)\omega^1\wedge\omega^2, \\ & d(a+\rho)\wedge\omega^1 - db\wedge\omega^2 = \\ & = (-a^2 - b^2 - \frac{3}{2}\rho^2 + \frac{b\lambda}{2} - \frac{5}{2}a\rho + \delta)\omega^1\wedge\omega^2, \\ & d\chi\wedge\omega^2 = (b+\lambda)(\chi-\delta)\omega^1\wedge\omega^2 \end{aligned} \tag{13}$$

система (12) становится вполне интегрируемой.

Потребуем, чтобы инварианты $a,b,\alpha,\rho,\delta,\chi$ были постоянными. Тогда из системы (13) получаем два случая:

1) $b = \lambda = \delta = 0, \quad \rho = -a, \quad \chi = -\frac{3}{2}a^2, a \neq 0;$

2) $a = \rho = \chi = 0, \quad \lambda = -b, \quad \delta = -\frac{3}{2}b^2, b \neq 0.$

Проинтегрируем систему (12) для случая 1). Имеем $d\omega^2$=0, $d(e^{\alpha v/2}\omega^1)$=0, поэтому положим $e^{\alpha v/2}\omega^1$=du, ω^2=dv. Тогда система (12) примет вид:

$$d\vec{r} = e^{-\frac{av}{2}}\vec{e}_1 du + \vec{e}_2 dv,$$
$$d\vec{e}_1 = \frac{a}{2}\vec{e}_1 dv + (ae^{-\frac{av}{2}}\vec{e}_2 + e^{-\frac{av}{2}}\vec{e}_3)du,$$
$$d\vec{e}_2 = -\frac{a}{2}\vec{e}_2 du + \vec{e}_3 dv,$$
$$d\vec{e}_3 = \frac{3}{2}a^2\vec{e}_2 dv.$$

Проинтегрировав полученную систему и исключив параметры, получим:

$$y^2(x - z^2)^3 = 1. \tag{14}$$

Интегрирование системы (12) при условии 2), т.е. при α=ρ=χ=0, λ=$-b$, δ=$-\frac{3}{2}(b^2)$, $b\neq0$, приводит к тому же результату.

Т.о., с точностью до аффинного преобразования существует только одна регулярная поверхность эллиптического типа (кроме аффинных сфер), все эквиаффинные инварианты которой постоянны. Эта поверхность в некоторой аффинной системе координат имеет уравнение (14). Аффинные нормали поверхности (14) параллельны одной плоско-

сти (XOY), т.е. это несобственная аффинная поверхность вращения, в то же время она является аффинной резной поверхностью [2]. Плоские линии тени на ней образуют сопряженную сеть, одно семейство которой состоит из парабол. Эти же параболы являются аффинными параллелями.

Аффинные сферы эллиптического типа с постоянными инвариантами

Для аффинных сфер эллиптического типа (за исключением поверхностей 2-го порядка) канонический репер выберем следующим образом. Вектор $\vec{e}_3$, как и во всех предыдущих случаях, направим по аффинной нормали. Для того, чтобы выбрать направление векторов $\vec{e}_1,\vec{e}_2$, заметим следующее. В каждой точке M аффинной сферы существует единственная квадрика, имеющая с поверхностью соприкосновение второго порядка и центр, совпадающий с центром аффинной сферы. Характеристикой такой квадрики при смещении по любой линии является пара кривых второго порядка. Ни одна из касательных к кривым, на которые распалась характеристика соприкасающейся квадрики, не совпадает в общем случае с касательной к линии, по которой происходит смещение. Однако существуют две линии, проходящие через точку M, когда такое совпадение имеет место. По касательным к таким кривым и направим векторы $\vec{e}_1,\vec{e}_2$. Нормируя подходящим образом векторы, найдем деривационные формулы построенного канонического репера:

$$\begin{gathered} d\vec{r} = \omega^1\vec{e}_1 + \omega^2\vec{e}_2, \\ d\vec{e}_1 = -\frac{1}{2}L\omega^1\vec{e}_1 + (\frac{1}{3}\mu\omega^1 + (L-\nu)\omega^2)\vec{e}_2 + \omega^1\vec{e}_3, \\ d\vec{e}_2 = (-\frac{1}{3}\mu\omega^1 + \nu\omega^2)\vec{e}_1 + \frac{1}{2}L\omega^1\vec{e}_2 + \omega^2\vec{e}_3, \\ d\vec{e}_3 = a\omega^1\vec{e}_1 + a\omega^2\vec{e}_2. \end{gathered} \qquad (15)$$

Условия полной интегрируемости системы (15) имеют вид:

$$\begin{gathered} d\mu\wedge\omega^1 - 6d\nu\wedge\omega^2 + 3(4\nu L - L^2 - 2a)\omega^1\wedge\omega^2 = 0, \\ 6d\nu\wedge\omega^1 + 2d\mu\wedge\omega^2 + 3\mu L\omega^1\wedge\omega^2 = 0, \\ a = \text{const} \neq 0. \end{gathered} \qquad (16)$$

Пусть теперь инварианты аффинной сферы L,μ,ν постоянны. Тогда из (16) получаем $\mu=0$, $a=\frac{1}{2}L^2$, $\nu=\frac{1}{2}L$. Т.к. в этом случае $d\omega^1=0$, $d\omega^2=0$, то, положив $\omega^1=du$, $\omega^2=dv$, приходим к вполне интегрируемой системе уравнений Пфаффа:

$$\begin{gathered} d\vec{r} = \vec{e}_1du + \vec{e}_2dv, \\ d\vec{e}_1 = (-\frac{1}{2}L\vec{e}_1 + \vec{e}_3)du + \frac{1}{2}L\vec{e}_2dv, \\ d\vec{e}_2 = \frac{1}{2}L\vec{e}_2du + (\frac{1}{2}L\vec{e}_1 + \vec{e}_3)dv, \\ d\vec{e}_3 = \frac{1}{2}L^2(\vec{e}_1du + \vec{e}_2dv), \\ L \neq 0. \end{gathered}$$

Проинтегрировав данную систему, а затем исключив параметры, получаем уравнение

$$xyz = 1. \qquad (17)$$

Центр этой аффинной сферы находится в начале координат. Данная сфера также является аффинной резной поверхностью с сопряженной сетью плоских линий тени, одно из семейств которых суть гиперболы [2. Рис. 4].

Итак, если не считать поверхностей второго порядка, существует только одна с точностью до аффинного преобразования сфера эллиптического типа, все эквиаффинные инварианты которой постоянны. Она определяется уравнением (17).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Щербаков Р.Н. Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1960. – 194 с.
2. Онищук Н.М., Светланова О.И. Аффинные резные поверхности с постоянными инвариантами // Геометр. сб. – Томск: Изд-во Том. ун-та. – 1989. – Вып. 30. – С. 76–95.
3. Онищук Н.М. Конгруэнции парабол, присоединенные к поверхности // Геометр. сб. – Томск: Изд-во Том. ун-та. – 1987. – Вып. 27. – С. 61–67.
4. Иванов Г.И. Конгруэнции парабол с неопределенными фокальными поверхностями // Геометр. сб. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1974. – Вып. 14. – С. 203–206.